Uitwerking Tentamen Systemen & Signalen

Woensdag 16 april 2008, 14:00-17:00 uur

Opgave 1: signalen en spectra
Het eerste signaal is een cosinus met amplitude 2 en fase $\frac{\pi}{2}$. Eén volledige slingeringen wordt doorlopen in 0.4 seconden. De frequentie is dus 2.5Hz.
Het tweede signaal is een cosinus met amplitude 3 en fase 0. Twee volledige slingering worden doorlopen in 0.2 seconden. De frequentie is dus 10Hz.
Het derde signaal is een optelling van de eerste twee signalen. Samengevat,

$$x_1(t) = 2\cos(5\pi t + \pi/2), \quad x_2(t) = 3\cos(20\pi t), \quad x_3(t) = 2\cos(5\pi t + \pi/2) + 3\cos(20\pi t).$$

Met formule (13) vinden we

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{j1000\pi t} + e^{-j1000\pi t} \\
y(t) &= \frac{e^{j\pi/4}}{2}e^{j20\pi t} + \frac{e^{-j\pi/4}}{2}e^{-j20\pi t} \\
z(t) &= (e^{j1000\pi t} + e^{-j1000\pi t})(\frac{e^{j\pi/4}}{2}e^{j20\pi t} + \frac{e^{-j\pi/4}}{2}e^{-j20\pi t}) \\
&= \frac{e^{j\pi/4}}{2}e^{j1020\pi t} + \frac{e^{-j\pi/4}}{2}e^{j980\pi t} + \frac{e^{j\pi/4}}{2}e^{-j980\pi t} + \frac{e^{-j\pi/4}}{2}e^{-j1020\pi t}
\end{aligned}$$

Beide piano's zijn zuiver gestemd en produceren dus een toon van exact dezelfde frequentie. Het niet volledig gelijk aanslaan van de toetsen leidt hooguit tot een verschil in fase. Het harder of zachter aanslaan van de toets leidt tot vershillende amplitudes. De som van twee of meer signalen met dezelfde frequentie, maar mogelijk verschillende amplitudes en/of fases, levert een signaal van diezelfde frequentie. Dus horen we een zuivere samengestelde toon.

Opgave 2: Systemen
(a) Een systeem is causaal als de uitvoer op een zeker tijdstip alleen afhangt van de huidige en vorige waarden van de invoer.
(b) Het systeem is geen LTI-systeem. Dit is eenvoudig als volgt in te zien. De invoer heeft 3 opeenvolgende waarden ongelijk aan nul, terwijl de uitvoer dat ook heeft. Alle overige waarden van de invoer/uitvoer zijn nul. Dit betekent dat het systeem een impulsresponsfunctie moet hebben met slechts één waarde ongelijk nul, oftewel een schaling+verschuiving van de $\delta[n]$. De gegeven uitvoer is duidelijk geen schaling van de invoer, dus het systeem is geen LTI-systeem. (Overigens, het systeem is het systeem $y[n] = x[n]^2$. Dit is duidelijk niet lineair.)
(c) Dit is eenvoudig te vinden via de convolutie:

$$x[n] * h[n] = \delta[n] + 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 4\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

$$y[n] * h[n] = \delta[n] + 4\delta[n-1] + 8\delta[n-2] + 10\delta[n-3] + 8\delta[n-4] + 4\delta[n-5] + \delta[n-6].$$

(d) Voor de convolutie van een signaal z met lengte $|z|$ en een signaal h met lengte $|h|$ geldt $|z * h| = |z| + |h| - 1$. Aangezien de uitvoer 6 samples lang is en $|h| = 3$ moet dus $|z| = 4$ zijn. Stel nu $z = [a, b, c, d]$ en $h = [1, 2, 1]$. Er geldt dan:

$$z * h = [a, 2a + b, a + 2b + c, b + 2c + d, c + 2d, d] = [1, 3, 5, 8, 8, 3]$$

De conclusie moet dus zijn, $a = b = 1, c = 2, d = 3$, m.a.w.

$$z = [1, 1, 2, 3] = \delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3]$$

(e) Invullen in formule (30) levert $H_2(e^{j\hat{\omega}}) = 1 + 2e^{-j\hat{\omega}} + e^{-2j\hat{\omega}}$.

(f) Iedere invoer van het type $[\ldots, a, -a, a, -a, a, -a, a, -a, \ldots]$ voldoet.

(g) $h_2 = [1, 2, 1]$ en $h_3 = [1, -1]$. Dus $h_4 = h_1 * h_2 = [1, 0, 0, -1] = \delta[n] - \delta[n-3]$ en dus $H_4(e^{j\hat{\omega}}) = 1 - e^{-2j\hat{\omega}}$.

Opgave 3: Fourier analyse
Gegeven zijn 3 periodieke signalen $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$ waarvoor $x(t) = x(t+2)$, $y(t) = y(t+4)$ en $z(t) = z(t+2)$ voor alle t. Tevens is gegeven

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{voor } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{voor } 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \leq t < 1 \\ 2-t & \text{voor } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{voor } 2 \leq t < 3 \\ 4-t & \text{voor } 3 \leq t < 4 \end{cases} \quad z(t) = \begin{cases} 2t & \text{voor } 0 \leq t < 1 \\ 4-2t & \text{voor } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

(a) Voor ieder signaal is de periode $T_0 = 2$.
(b) De DC-component is het gemiddelde over één periode, dus $DC(x) = 1/4$ en $DC(y) = 1/4$.
(c) Volgens formule (23) geldt: $a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j(2\pi/T_0)kt}\, dt$
Wegens $T_0 = 2$ en $x(t) = 0$ voor $1 \leq t < 2$ vinden we:

$$a_k = \frac{1}{2} \int_0^1 t e^{-j\pi k t}\, dt.$$

M.b.v. formule (16) vinden we:

$$a_k = \frac{1}{2} \left[\frac{-j\pi k t - 1}{j^2 \pi^2 k^2} e^{-j\pi k t} \right]_0^1 = \frac{(1 + j\pi k) e^{-j\pi k} - 1}{2 j^2 \pi^2 k^2} = \frac{(1 + j\pi k)(-1)^k - 1}{2\pi^2 k^2}.$$

(d) Duidelijk is dat $z(t) = x(t) + y(t)$. De Fourier-coëfficienten van het signaal $z(t)$ zijn daarom de optelling van de Fourier-coëfficienten van $x(t)$ en $y(t)$:

$$z_k = \frac{(1 + j\pi k)(-1)^k - 1}{2\pi^2 k^2} + \frac{(1 - j\pi k)(-1)^k - 1}{2\pi^2 k^2} = \frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2} = \begin{cases} \frac{-2}{\pi^2 k^2} & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \\ 0 & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \end{cases}$$

Opgave 4: z-transformaties
(a) Volgens formule (34) van het formuleblad:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{2} b_k z^{-k} = \frac{1}{3} + \frac{z^{-1}}{3} + \frac{z^{-2}}{3}$$

.
(b) Omdat het systeem een LTI-systeem is kunnen we de termen van $x[n]$ separaat beschouwen. We definiëren $x[n] = x_0[n] + x_1[n] - 3x_2[n]$ waarbij

$$x_0[n] = 4, \quad x_1[n] = \cos(\frac{n\pi - \pi}{4}), \quad x_2[n] = \cos(\frac{2n\pi}{3}).$$

Het systeem is duidelijk een *running average filter* waarbij het gemiddelde wordt genomen van het huidige sample en zijn twee voorgangers.

- Voor het constante signaal x_0 zal de uitvoer duidelijk weer x_0 zijn.

- Voor x_1 ligt dit wat ingewikkelder. $x_1[0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1[1] = 1$ en $x_1[2] = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dus het gemiddelde van die drie waarden is niet nul. Het is duidelijk dat x_1 dus niet wordt verwijderd door het systeem (geen 'nulling'). Als we x_1 als invoer aan het systeem aanbieden krijgen we dus de uitvoer

$$\frac{1}{3}\left(\cos(\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{n\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})\right).$$

  De som van meerdere cosinussen met dezelfde frequentie levert een cosinus van diezelfde frequentie. Via conversie van phasors in poolnotatie naar cartesische coördinaten, vectoroptelling, en conversie terug naar phasors vinden we:

$$\frac{1}{3}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\cos(\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{2}).$$

- Voor x_2 vinden we

$$x_2[0] = 1, \quad x_2[1] = \frac{-1}{2}, \quad x_2[2] = \frac{-1}{2}.$$

  Tevens geldt duidelijk $x_2[n+3] = \cos(\frac{2(n+3)\pi}{3}) = \cos(\frac{2n\pi}{3} + 2\pi) = \cos(\frac{2n\pi}{3}) = x_2[n]$. Dus het gemiddelde over drie opeenvolgende samples is altijd nul, m.a.w. x_2 wordt door dit systeem volledig verwijderd ('nulling').

Samengevat vinden we dus voor de uitvoer

$$4 + \frac{1}{3}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\cos(\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{2}).$$

(c) De nulpunten van de systeemfunctie bepalen de frequenties die door het systeem volledig verwijderd worden ('nulling').

$$H(z) = 0 \Leftrightarrow z^{-2} + z^{-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + z + z^2 = 0$$

Deze laatste stap vind je door aan beide kanten te vermenigvuldigen met z^2. Via de abc-formule vind je dan de oplossingen:

$$z_1 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} = e^{j2\pi/3}, \quad z_2 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} = e^{j4\pi/3}.$$

De (complexe) signalen $s_1[n] = (z_1)^n = e^{j2\pi n/3}$ en $s_2[n] = (z_2)^n = e^{j4\pi n/3}$ worden door dit systeem dus volledig verwijderd. (Dit laatste werd overigens niet gevraagd).

(d) Deze vraag kan beantwoord worden via de constructie van een polynoom met de juiste nulpunten. Handiger is de volgende observatie: een running average filter over 6 samples zal het signaal $x_0[n] = \cos(n\pi/3)$ volledig verwijderen, terwijl een running average filter over 8 samples het signaal $x_1[n] = \cos(n\pi/4)$ volledig zal verwijderen. De samenstelling van deze twee filters levert dus het gewenste resultaat. De impulsrepons van dit samengestelde filter is dan

$$\frac{1}{6}\frac{1}{8}[1,1,1,1,1,1] * [1,1,1,1,1,1,1,1] = \frac{1}{48}[1,2,3,4,5,6,6,6,5,4,3,2,1].$$

De bijbehorende systeemfunctie is dus

$$H(z) = \frac{1}{48}(1+2z^{-1}+3z^{-2}+4z^{-3}+5z^{-4}+6z^{-5}+6z^{-6}+6z^{-7}+5z^{-8}+4z^{-9}+3z^{-10}+2z^{-11}+z^{-12}).$$

(e)-(g) Ik kies de volgorde **(f)**, **(e)**, **(g)**. Iedere andere volgorde is mogelijk.
(f) De impulsresponses van het eerste systeem is $h_1 = [1, -1]$. De systeemfunctie van het tweede systeem is $H(z) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-2}) = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}$. Dit systeem heeft dus de impulsresponse $h_2 = [1, -1, 1, -1]$. Tenslotte heeft het derde systeem de frequentierespons $H(e^{j\hat{\omega}}) = 2e^{-j3\hat{\omega}}$, en dus de impulsrespons $h_3 = [0, 0, 0, 2]$. De impulsrespons van het totale systeem is dan

$$h_1 * h_2 + h_3 = [1, -1] * [1, -1, 1, -1] + [0, 0, 0, 2] = [1, -2, 2, -2, 1] + [0, 0, 0, 2] = [1, -2, 2, 0, 1]$$

oftewel $h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]$.
(e) De differentievergelijking wordt dan $w[n] = x[n] - 2x[n-1] + 2x[n-2] + x[n-4]$.
(g) En de systeemfunctie is $H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-4}$.